**Teoria miary i całki**
SPPI IIr. semestr zimowy 2006/7
LISTA 5

23/10/06

**Zadanie 1** (uzupełnienie wykładu)
Niech $E_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) będą rozłącznymi zbiorami mierzalnymi względem pewnej miary zewnętrznej $\overline{\mu}$ takimi, że $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = X$ Udowodnij, że dla dowolnego zbioru $A$ zachodzi równość:

$$\bar{\mu}(A) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\mu}(A \cap E_i).$$

**Zadanie 2**
Niech $A$ i $B$ będą zbiorami mierzalnymi względem pewnej miary zewnętrznej $\overline{\mu}$ takimi, że $A \subset B$ i $\overline{\mu}(A) = \overline{\mu}(B)$. Udowodnij, że jeśli $C$ jest dowolnym zbiorem takim, że $A \subset C \subset B$, to $C$ też jest mierzalny względem $\overline{\mu}$ oraz $\overline{\mu}(C) = \overline{\mu}(A)$.

**Zadanie 3**
Niech $\overline{\mu}$ będzie miarą zewnętrzną na $2^X$, i niech $\mu$ będzie miarą powstałą z $\overline{\mu}$ przez obcięcie do $\sigma$-ciała $\Sigma$ zbiorów mierzalnych względem $\overline{\mu}$. Czy dla wszystkich zbiorów $A \subset X$ zachodzi równość $\overline{\mu}(A) = \inf\{\mu(F) : A \subset F \in \Sigma\}$?

ROZWIĄZANIE: Prawdziwa jest tylko nierówność $\overline{\mu}(A) \leq \inf\{\mu(F)\colon A \subset F \in \Sigma\}$, ponadto jest ona oczywista z monotoniczności miary zewnętrznej. Druga nierówność jest FAŁSZYWA. Przykład jest poniżej. ALE równość ta jest prawdziwa (i łatwa) dla miary zewnętrznej Lebesgue'a na prostej.

PRZYKŁAD: Niech $X = \{1, 2, ..., n\}$, gdzie $n \geq 2$. Określamy miarę zewnętrzną $\bar{\mu}$ tak: jest to ,,w zasadzie" miara licząca, z tą różnicą, że zbiory jednoelementowe mają miarę 1,5 (zamiast 1). Pozostałe zbiory mają miarę równą ich liczebności. Jest to miara zewnętrzna: jeśli dodajemy zbiory wielopunktowe, to jest addytywność, a jeśli choć jeden z dodawanych zbiorów jest jednopunktowy, to suma miar wyjdzie większa od miary sumy, czyli podaddytywność. Monotoniczność też jest, bo każdy zbiór zawierający zbiór jednopunktowy albo jest mu równy, albo ma miarę co najmniej 2, co jest większe od 1,5. Jakie są zbiory mierzalne? Otóż tylko $\emptyset$ i $X$. Żaden inny zbiór $E$ nie jest mierzalny, bo jeśli weźmiemy zbiór $A$ zawierający po jednym punkcie z $E$ i $E^c$, to miara $A$ jest 2, a suma miar przekrojów $A \cap E$ i $A \cap E^c$ wyjdzie 3.
Jeśli teraz zastosujemy wzór z zadania, to wyjdzie, że miara zewnętrzna każdego zbioru $A$ niepustego powinna wynosić tyle co miara $X$ (czyli $n$), bo to jest jedyny zbiór mierzalny zawierający $A$. A tak nie jest!

**Zadanie 4**
Czy prawdziwe jest następujące twierdzenie? :
Jeśli $\overline{\mu}$ jest miarą zewnętrzną skończoną (czyli $\overline{\mu}(X) < \infty$), to zbiór $A$ jest mierzalny wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{\mu}(A^c) = \overline{\mu}(X) - \overline{\mu}(A)$.

*Wsk. skorzystaj z zadania poprzedniego.*

ROZWIĄZANIE: To twierdzenie bez dodatkowych założeń jest FAŁSZYWE. W poprzednim przykładzie przy $n \geq 4$ każdy zbiór o liczebności większej od 1 a mniejszej od $n - 1$ spełnia ten warunek, bo na nim i na dopełnieniu miara jest licząca. A wiemy, że taki zbiór nie jest mierzalny, bo mierzalne są tylko pusty i $X$.

ALE, dla miar zewnętrznych spełniających zadanie poprzednie (na przykład dla miary zewnętrznej Lebesgue'a) również i to twierdzenie jest prawdziwe. Rozwiązanie pozostawiam do zrobienia.

**Zadanie 5**
Udowodnij, że dla miary Lebesgue'a na prostej zachodzą wzory

$$\lambda([a,b]) = b - a \quad (a \leq b) \tag{1}$$

$$\lambda(\{x\}) = 0, \tag{2}$$

$$\lambda((a,b)) = b - a \quad (a < b) \tag{3}$$

**Zadanie 6**
Wykaż, że dla dowolnego zbioru $A$ mierzalnego względem miary Lebesgue'a mamy równość $\lambda(A) = \inf\{\lambda(U)\}$ po wszystkich zbiorach $U$ otwartych zawierających $A$. Podobnie, wykaż, że $\lambda(A) = \sup\{\lambda(S)\}$ po wszystkich zbiorach domkniętych $S$ zawartych w $A$. (Te warunki nazywają się *regularnością miary*.)

**Zadanie 7**
Udowodnij, że jeśli miara $\mu$ określona na sigma-ciele zbiorów borelowskich na prostej spełnia warunek $\mu(A + x) = \mu(A)$ (dla każdego $x \in \mathbb{R}$ i $A$ mierzalnego), to $\mu = c\lambda$ dla pewnej stałej $c \geq 0$.
*Wsk. Określ $c_n = n\mu([0, \frac{1}{n}))$ i zauważ, że $\mu([0,1)) = c_n$. Stąd $c_n$ nie zależy od $n$. Dalej przybliżaj dowolne przedziały przedziałami o końcach wymiernych.*

**Zadanie 8**
Przypomnij konstrukcję zbioru niemierzalnego z pierwszego wykładu i uzasadnij (już teraz z pełnym zrozumieniem) dlaczego jest on faktycznie niemierzalny względem miary zewnętrznej Lebesgue'a $\overline{\lambda}$.

**Zadanie 9**
Wykaż, że jeśli $A$ jest mierzalny względem miary Lebesgue'a, to $\lambda(A) = \lambda(G)$, gdzie $G$ jest pewnym zbiorem typu $G_\delta$ zawierającym $A$. Podobnie, wykaż, że $\lambda(A) = \lambda(F)$, gdzie $F$ jest pewnym zbiorem typu $F_\sigma$ zawartym w $A$.